Retículos cúbicos, ortomodulares, conexos, de altura 3 y configuraciones proyectivas ortomodulares conexas

Jorge Sarmiento
Profesor Asociado
Departamento de Matemáticas, UPPR

Sinopsis

En este artículo se muestra la construcción de una configuración proyectiva ortomodular conexa, partiendo de un retículo cúbico, ortomodular, conexo de altura 3. Se presentan las definiciones y ejemplos básicos para la comprensión de dicha construcción sin necesidad de referencias adicionales. Se señala finalmente la validez del recíproco y se deja la construcción pendiente para un próximo estudio.

Abstract

Cubic orthomodular connected lattices of height 3 and orthomodular connected projective configurations

The construction of a connected orthomodular projective configuration, from a cubic, connected, orthomodular lattice of height 3 is shown. The first section gives the definitions and examples needed to understand without additional references the construction, which is done in the last part of the work. It is pointed out that the reciprocal is also true, and this fact will be shown in a future publication.

Introducción

Por su utilidad como modelos en la lógica de la mecánica cuántica, los conjuntos parcialmente ordenados y los retículos ortomodulares se han estudiado considerablemente desde los años 30. Estas estructuras tienden a complicarse por sí mismas, por lo que su estudio suele enfocarse a través de su asociación con semigrupos y espacios de ortogonalidad, estructuras que lo facilitan. En este trabajo el autor presenta la construcción de configuraciones proyectivas ortomodulares conexas, a partir de retículos cúbicos, ortomodulares, conexos, de altura 3. En la primera sección se dan definiciones y ejemplos, suficientes para comprender lo básico de la construcción que se presenta en la segunda parte. La construcción de retículos a partir de configuraciones proyectivas se deja abierta para un próximo estudio.

Definiciones

Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado, R, en el que dos elementos cualesquiera , x e y, tienen una cota superior mínima, $x \vee y$, y una cota inferior máxima, $x \wedge y$. Si la operación $\wedge$ es distributiva con respecto a la operación $\vee$, el retículo es **distributivo**. Un **subretículo**, S, es un subconjunto de R, que a la vez es un retículo bajo las mismas operaciones, $\vee$ y $\wedge$.

En un retículo R, x **cubre** a y si $x>y$ y no hay un valor de z tal que $x > z > y$. Un retículo con cotas universales, 0 y 1, (esto es, $0 \leq x \leq 1$ para todo $x \varepsilon R$) es **complementado,** si para cada elemento x hay otro, x', de forma tal que $x \wedge x' = 0$ y $x \vee x' = 1$. En un retículo con 0, cualquier elemento que lo cubra es un **átomo** del mismo. Un retículo que a la vez sea distributivo y complementado es un **retículo de Boole.**

Un **ortorretículo** es un retículo complementado que satisface:

$$(x \wedge y)' = x' \vee y', \qquad (x \vee y)' = x' \wedge y' \tag{1}$$

$$x'' = (x')' \tag{2}$$

Un retículo es **conexo** si para dos átomos cualesquiera, x e y, del retículo, hay una sucesión $x_0, x_1, ..., x_{2n}$ de átomos con $x_0 = x$ y $x_{2n} = y$ y:

$$x_{2i} < x'_{2i+1} \qquad i = 0, 1, ..., n - 1 \tag{3}$$

$$x_{2i} < x'_{2i-1} \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

Un **retículo ortomodular** es un ortorretículo en el que $x \leq y$ implica que

$$x \vee (x' \wedge y) = y \tag{5}$$

Un retículo ortomodular en el que cada subretículo ortomodular maximal de Boole tiene ocho elementos es un **retículo cúbico**. La figura 1 (C) muestra un retículo cúbico, ortomodular, conexo y de altura 3, pues todos los pasos entre 0 y 1 tienen longitud 3; por ejemplo 0a - ac' - c'1. Los elementos a, b, c, d y e son los átomos y sus complementos, a', b', c', d', y e', los **coátomos**.

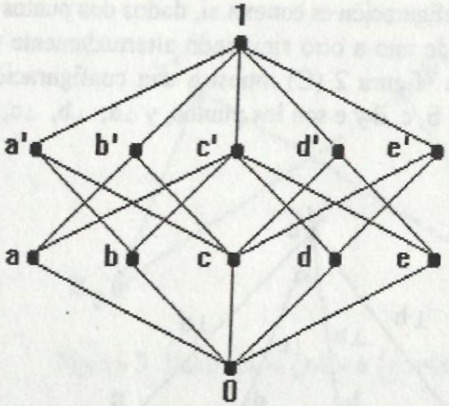

Figura 1. Retículo cúbico, ortomodular, conexo y de altura 3

S = (P,B,I) es una **estructura de incidencia** si P y B son conjuntos disjuntos e I es un subconjunto del producto cartesiano P x B.

Una **configuración proyectiva** es una estructura de incidencia, C = (P,L,I), en la que P es un conjunto de puntos y L un conjunto de líneas, tal que:

- Dos líneas no pasan por los mismos dos puntos
- Cada punto está en por lo menos una línea
- Cada línea contiene por lo menos un punto

La configuración (P,L,I) es **ortomodular** si además hay una función

$$\perp: P \rightarrow L \quad \text{y} \quad \perp: L \rightarrow P \tag{6}$$

tal que:

- $\perp(\perp p) = p$ y $\perp(\perp l) = l$, $p \in P$, $l \in L$
- $p \in l$ implica que $\perp l \in \perp p$
- $p \notin \perp p$, $\perp l \notin l$
- si $x \in l$, entonces $\perp x \cap l \neq \emptyset$

Se dice que una configuración es **conexa** si, dados dos puntos arbitrarios de C, x e y, se puede ir de uno a otro siguiendo alternadamente una secuencia punto-línea-punto. La figura 2 (C) muestra una configuración proyectiva, ortomodular conexa; a, b, c, d y e son los puntos, y $\perp a$, $\perp b$, $\perp c$, $\perp d$ y $\perp e$ las líneas de la misma.

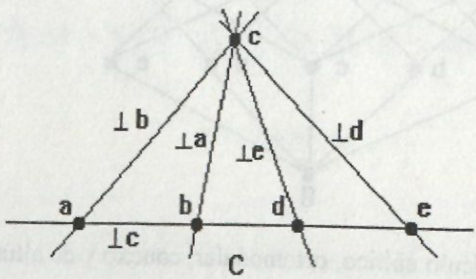

Figura 2. Configuración proyectiva, ortomodular conexa

Construcción de una configuración proyectiva, ortomodular, conexa, C, a partir de un retículo, R, cúbico, ortomodular, conexo, de altura 3.

La construcción de una configuración proyectiva, ortomodular, conexa, C, a partir de un retículo cúbico, ortomodular, conexo, de altura 3 se realiza como se indica a continuación:

i. Los puntos de la configuración C, corresponden a los átomos del retículo R.
ii. Por cada átomo x de R, hay una línea $\perp x$ en la configuración C, definida por

$$\perp x\text{-}\ y : y \text{ es un átomo de } R \text{ e } y < x' \qquad (7)$$

Puesto que la relación entre x y x' es biunívoca en R, tenemos que, $\perp x = \perp y$ implica por definición que $\{ z : z < x' \} = \{ z : z < y' \}$, lo que gráficamente puede ilustrarse como muestra la figura 3 (A).

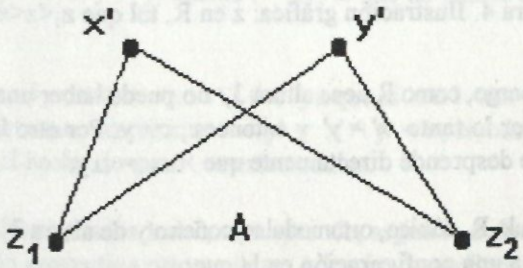

Figura 3. Ilustración gráfica $\{z:z<x'\}= \{z:z<y'\}$

Ahora bien, por la unicidad de la cota superior mínima de los elementos de R, la situación anterior solamente puede darse si, como muestra la figura 4 (B), por ejemplo, hubiese un elemento z en R, tal que $z_1 < z < x'$, en cuyo caso la altura de R sería 4.

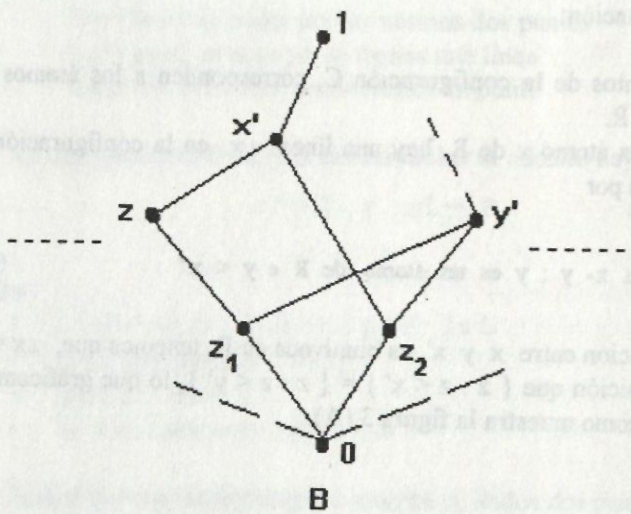

Figura 4. Ilustración gráfica: z en R, tal que $z_1<z<x'$

Sin embargo, como R tiene altura 3, no puede haber una z que cumpla esta condición. Por lo tanto $x' = y'$ y entonces $x = y$. Por otro lado si $x = y$, de la definición se desprende directamente que $\perp x = \perp y$.

El retículo R, cúbico, ortomodular, conexo y de altura 3, da lugar bajo estas condiciones a una configuración en la que:

1. Dos líneas no pueden pasar por los mismos 2 puntos: Si esto ocurriese, en R tendríamos una situación como la ilustrada en la figura 3, lo cual es imposible.

2. Cada punto está, por lo menos, en una línea. Si hubiese un punto p, aislado en C, entonces habría un átomo correspondiente a p en R tal que $p \nless x'$ para ningún x' coátomo de R, lo cual es una contradicción, pues en un retículo cúbico par todo átomo y, $y < x'$ para algún x' coátomo de R.

3. Cada línea tiene, por lo menos, un punto: Si hay una línea $\perp x$ sin ningún punto, entonces habría un coátomo x' de R tal que $y \nless x'$ para ningún átomo y de R, lo cual no puede ocurrir en tal retículo.

4. Digamos que $C = (P, L, I)$, $P = \{ \text{puntos } p\}$ y $L = \{ \text{líneas } l\}$
Si definimos una función
$$\begin{array}{lcl} \perp : P \to L & \text{y} & \perp : L \to P \\ x \to \perp x & & \perp x \to x \end{array}$$
claramente tendremos que $\perp(\perp x) = x$ y $\perp(\perp l) = l$, $x \varepsilon P$ y $l \varepsilon L$.

5. Además, $p \varepsilon l$, $p \varepsilon P$ y $l \varepsilon L$, implica que $\perp l \varepsilon \perp p$. Esto equivale a decir que, si en R, $p < y'$ (p: átomo de R y y' coátomo) siendo $l = \perp y$, entonces $y < p'$ (y: átomo, p': coátomo de R), lo cual es cierto en todo ortorretículo.

6. También tenemos que $p \not\varepsilon \perp p$ y $\perp l \not\varepsilon L$, pues si en C $p \varepsilon \perp p$ o $\perp l \varepsilon l$, entonces en R, $p < p'$ o $y' < y$, siendo $l = \perp y$, lo que no ocurre en retículos cúbicos.

7. Por último, si $x \varepsilon l$, entonces $\perp x \cap l \neq \varnothing$ ya que si $x \varepsilon l$ con $\perp x \cap l = \varnothing$ en C, en R tendría que ocurrir que $x < y'$ y $x' \wedge y' = \varnothing$, siendo $l = \perp y$, lo que contradice el hecho de que R es ortomodular.

Por lo tanto, de los apartados 1 al 7, se desprende, según la definición, que C es una configuración proyectiva ortomodular. Además, como R es un retículo conexo, dados dos átomos cualesquiera de R, a y b, se puede ir del uno al otro siguiendo las reglas dadas en la definición de retículo ortomodular conexo. Puesto que los puntos de C corresponden a los átomos de R, se puede ver que, siguiendo la construcción dada, para dos puntos cualesquiera, x e y, de C, se puede ir del uno al otro siguiendo una secuencia punto-línea-punto. Esto nos dice que C es conexa.

Conclusión

Lo expuesto anteriormente nos permite enunciar el siguiente teorema:

<u>Teorema</u> 1:

Todo retículo cúbico, ortomodular, conexo, de altura 3, da lugar a una configuración proyectiva ortomodular conexa, cuyos puntos son los átomos, x, del retículo, y por cada coátomo, x', hay una línea, $\perp x$, definida por los átomos cubiertos por x'.

El recíproco de este teorema también es cierto. Su demostración se incluirá en una próxima publicación.