Configuraciones proyectivas ortomodulares y retículos cúbicos

Jorge Sarmiento
Associate Professor
Department of Mathematics, UPPR

Sinopsis

El autor presenta la construcción de un retículo cúbico, ortomodular, conexo, de altura 3, partiendo de una configuración proyectiva, ortomodular y conexa y se dan al principio las definiciones y ejemplos básicos para comprender dicha construcción sin necesidad de referencias adicionales. Este resultado, junto con el recíproco, publicado en una edición anterior, prueba la existencia de una correspondencia biunívoca entre ambas estructuras.

Abstract

Orthomodular projective configurations and cubic lattices

The author shows the construction of a cubic, connected, orthomodular lattice of height 3, from a connected, orthomodular, projective configuration and gives the definitions and basic examples needed to understand the construction without additional references. This result, along with the converse, which was published in a previous edition, proves the existence of a one-to-one correspondence between the two structures.

Introducción

Por su utilidad como modelos en la lógica de la mecánica cuántica, los conjuntos parcialmente ordenados y los retículos ortomodulares han sido objeto de considerable estudio desde los años 30. Estas estructuras tienden a complicarse por sí mismas, por lo que su estudio suele enfocarse a través de su asociación con semigrupos y espacios de ortogonalidad, estructuras que lo facilitan.

En este trabajo el autor presenta la construcción de retículos cúbicos, ortomodulares, conexos, de altura 3, a partir de configuraciones proyectivas, ortomodulares y conexas. En la primera sección se dan definiciones y ejemplos suficientes para comprender la construcción, la cual se realiza en la segunda parte.

Definiciones I

Una relación binaria, $\leq$, en un conjunto X se dice que es de orden parcial, cuando es:

a. Reflexiva: $x \leq x$, para todo x en X

b. Antisimétrica: $x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$

c. Transitiva: Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Un conjunto X con un orden parcial $\leq$, se conoce como un **conjunto parcialmente ordenado o copo**.

Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado, R, en el que dos elementos cualesquiera, x y y, tienen una cota superior mínima o **sup**, $x \vee y$, y una cota inferior máxima o **inf**, $x \wedge y$.

Un **subretículo**, S, es un subconjunto de R, que a la vez es un retículo bajo las mismas operaciones, $\vee$ y $\wedge$.

En un retículo R, x **cubre** a y si $x > y$ y no hay un z tal que $x > z > y$.

Si la operación $\wedge$ es distributiva con respecto a la operación $\vee$, el retículo es **distributivo**.

Un retículo con cotas universales, 0 y 1 (esto es, $0 \leq x \leq 1$ para todo x y R,), es **complementado** si para cada elemento x hay otro, x', tal que $x \wedge x' = 0$

y $x \vee x' = 1$.

En un retículo con *0*, cualquier elemento que lo cubra es un **átomo** del mismo.

Un retículo que a la vez sea distributivo y complementado es un **retículo de Boole**.

Un **ortorretículo** es un retículo complementado que satisface las siguientes condiciones:

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

$x'' = (x')'$

Si para dos átomos cualesquiera, x y y, del retículo, existe una sucesión x_0, x_1, ..., x_{2n} de átomos con $x_0 = x$ y $x_{2n} = y$ y:

$x_{2i} < x'_{2i+1}$ $\quad i = 0, 1, \ldots\ldots, n-1$

$x_{2i} < x'_{2i-1}$ $\quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$

se dice que el retículo es **conexo.**

Un **retículo ortomodular** es un ortorretículo para el cual $x \leq y$ implica que $x \vee (x' \wedge y) = y$.

Un retículo ortomodular en el que cada subretículo ortomodular maximal booleano tiene 8 elementos es un **retículo cúbico**. Por ejemplo, la figura 1 muestra un retículo cúbico, ortomodular, conexo, de altura 3 (todos los pasos entre *0* y *1*, como el *0c-cb'-b'1*, tienen longitud 3).

Los elementos *a, b, c, d* y *e* son los átomos, y sus complementos, *a', b', c', d',* y *e'*, los **coátomos.**

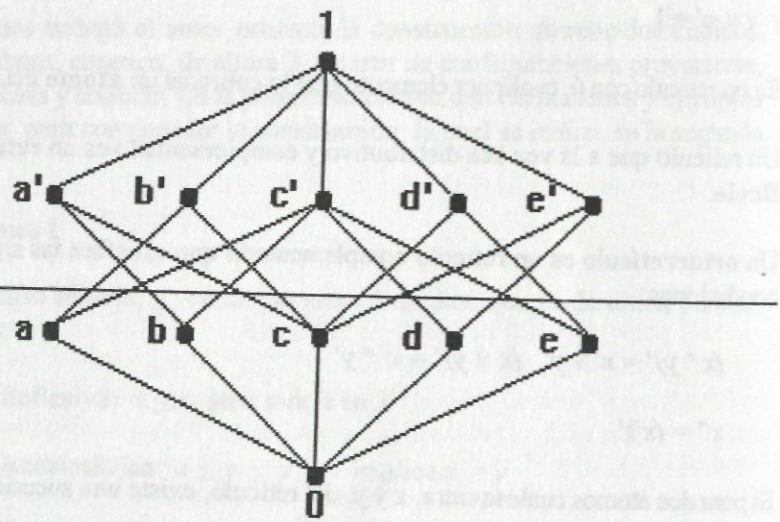

Figura 1. Retículo cúbico, ortomodular, conexo de altura 3

Definiciones II

$S = (P,B,I)$ es una **estructura de incidencia** si P y B son conjuntos disjuntos, e I es un subconjunto del producto cartesiano $P * B$.

Una **configuración proyectiva** es una estructura de incidencia, $C = (P,L,I)$, en la que P es un conjunto de puntos y L un conjunto de líneas, tal que:

1. Dos líneas no pasan por los mismos dos puntos
2. Cada punto está en por lo menos una línea
3. Cada línea contiene por lo menos un punto.

La configuración *(P,L,I)* es **ortomodular** si además existe una función $\perp: P \to L$ y $\perp: L \to P$ tal que:

4. $\perp(\perp p) = p$ y $\perp(\perp l) = l$, $p \in P$, $l \in L$

5. $p \in l$ implica que $\perp l \in \perp p$

6. $p \notin \perp p$, $\perp l \notin l$

7. si $x \in l$, entonces $\perp x \cap l \neq \emptyset$

Se dice que una configuración es **conexa** si dados dos puntos arbitrarios de *C*, *x* y *y*, se puede ir de uno a otro siguiendo alternativamente una secuencia punto-línea-punto. Por ejemplo, la figura 2 (gráfica *C*) ilustra una configuración proyectiva, ortomodular conexa; *a, b, c, d* y *e* son los puntos y $\perp a$, $\perp b$, $\perp c$, $\perp d$ y $\perp e$ las líneas de la misma.

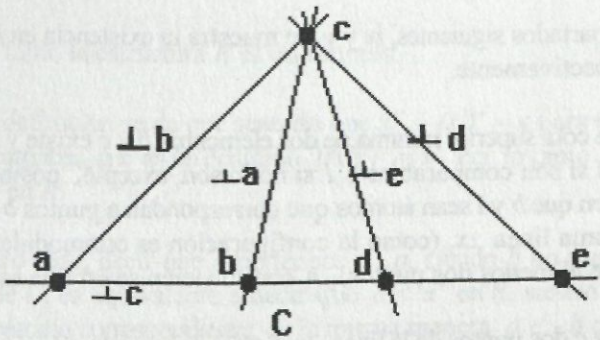

Figura 2. Configuración proyectiva, ortomodular conexa

Construcción de un retículo, R, cúbico, ortomodular, conexo, de altura 3, a partir de una configuración proyectiva, ortomodular, conexa, C

La construcción se realiza como se indica a continuación.

i. Los átomos, P, del retículo corresponden a los puntos de la configuración; esto es, cada punto de la configuración determina un átomo del retículo.

ii. Por cada átomo, x, se añade un, y solo un, coátomo x', (Esto es, coátomos $= \{ x' : x \in P \}$), de forma que $x < y'$ (x átomo, y' coátomo) si, y solo si, $x \in \perp y$, $\perp y \subseteq C$.

iii. Finalmente se añaden los elementos 0 y 1 de forma que $0 < x$, para todo átomo x, y $x' < 1$, para todo coátomo x'.

Por definición, la estructura, R, que se obtiene es un copo.

En los dos apartados siguientes, **iv** y **v**, se muestra la existencia en R de un sup y un inf respectivamente.

iv. **Sup**: La cota superior mínima de dos elementos b y c existe y es el mayor de ellos si son comparables o 1 si no lo son, excepto, posiblemente, en el caso en que b y I sean átomos que correspondan a puntos b y c en C de una misma línea $\perp x$, (como la configuración es ortomodular toda línea contiene al menos dos puntos). A continuación se estudia este caso.

Sean b y c dos puntos de la línea $\perp x$. Según se ha visto, x' es cota superior de b y c. Supóngase ahora que hay otro coátomo y', distinto de x', tal que $b < y'$ y $c < y'$. Esto implica que en C, b y c pertenecen a la línea $\perp y$, pero en C, por definición, dos líneas no pueden pasar por los mismos dos puntos. Por lo tanto, según el proceso de construcción, las únicas cotas superiores de b y c son x' y 1. Como $x' < 1$ resulta que x' es la cota superior mínima de b y c; esto es, $x' = sup\ \{b,c\}$ o $b \vee c = x'$, b y c son átomos y x' coátomo de R.

v. **Inf**: La cota superior mínima de dos elementos p y q, p^q, existe y es el menor de ellos si son comparables o 0 si no lo son, excepto, posiblemente, en el caso en que p y q sean coátomos $(p=b', q=c')$ correspondientes a átomos b y c que provienen de puntos de una misma línea $\perp x \in C$. A continuación se analiza este caso.

Sean b y c dos puntos de C tales que $b, c \in \perp x$. Como C es ortomodular resulta que x pertenece a la intersección de $\perp b$ y $\perp c$, lo que implica que, en R, $x < b'$ y $x < c'$. Por consiguiente, x es una cota inferior de b' y c' (x átomo, b' y c' coátomos). Supóngase que existe otro átomo, y, tal que $y < b'$ y $y < c'$. Esto implicaría que en C, y, pertenecería a la intersección de las líneas $\perp b$ y $\perp c$, contradiciendo el hecho de que en C dos líneas no pueden pasar por los mismos dos puntos. Se tiene pues, según el proceso de construcción, que las únicas cotas inferiores de b' y c' son x y 0. Como $0 < x$, podemos concluir que x es la cota inferior máxima de b' y c'; esto es, $x = inf\{b',c'\}$ o $x = b' \wedge c'$.

Por lo tanto la estructura R es un retículo.

vi. Si por definición se da por sentado que $x'' = (x')' = x$ para todo átomo x en R, entonces, si x' es un coátomo, $[(x')']' = x'$. Por lo tanto $a'' = a$ para todo a en R.

vii. Por otro lado, decir que b pertenece a $\perp a$, siendo b un punto y $\perp a$ una línea de C, es equivalente a decir que $b < a'$ en R, siendo b el átomo y a' el coátomo correspondiente; de la misma manera $a \in \perp b$ en C equivale a decir que $a < b'$ en R.

Como en C, $b \in \perp a$ implica que $a \in \perp b$, equivalentemente se tiene en R que, $b < a'$ implica que $a < b'$.

viii. De la construcción del retículo se desprende directamente que su altura es 3.

ix. La conexidad del retículo R es una consecuencia inmediata de la conexidad de C y las condiciones siguientes:

a. Cada punto de C pertenece, al menos, a una línea

b. Cada línea de C contiene, al menos, un punto.

x. Puesto que en C, $a \in \perp x$ implica que la intersección de $\perp a$ y $\perp x$ no es vacía, en R, $a < x'$ implica que $a' \wedge x'$ es distinto de 0.

De los apartados **i** al **x** se deduce que R es un retículo ortomodular, conexo y de altura 3.

xi. Por último, se sabe que en C, si $x \in l$ entonces $\perp l \in \perp x$ y las líneas $\perp x$ y l se intersecan en un punto p, esto es, que $p \in \perp x$ y $p \in l$, y por lo tanto $x \in \perp p$ y $\perp l \in \perp p$. Todo esto equivale a decir en R que, si $x < l$, entonces $l' < x'$ y $p < x'$; $p < l, x < p'$ y $l' < p'$. La figura 3 es una representación gráfica de la construcción.

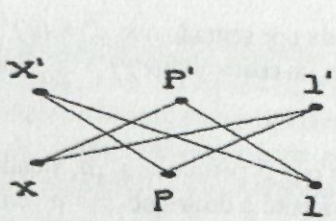

Figura 3. Representación gráfica de la construcción

Si se añaden las cotas universales *0* y *1* se obtiene el subretículo, *R*, maximal, ortomodular Booleano de 8 elementos mostrado en la figura 4.

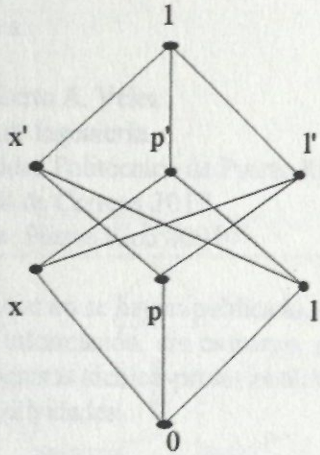

Figura 4. Subretículo maximal, ortomodular booleano de 8 elementos

Del apartado **xi** se deduce además que el retículo *R* es cúbico.

Conclusión

Se puede concluir entonces diciendo que toda configuración proyectiva, *C*, ortomodular y conexa, da lugar a un retículo, *R*, cúbico, ortomodular y conexo, de altura 3.

En el Vol. 4, Núm. 2 (Dic. 94), pp301-308 de la Revista de la Universidad Politéctica de Puerto Rico publicamos la construcción de la configuración proyectiva a partir del retículo cúbico. Ambos resultados permiten enunciar el siguiente teorema:

Teorema.- Todo retículo cúbico, R, ortomodular y conexo, de altura 3, da lugar a una configuración proyectiva, C, ortomodular y conexa, y viceversa.