Cálculo de los coeficientes de la ecuación de pérdidas para un sistema de generación de potencia

Fernando Ruiz
José A. Santos
Candidatos a graduación en ingeniería eléctrica, UPPR

Sinopsis

La ingeniería ha trabajado con notable éxito en el análisis de los costos de combustible y el rendimiento de calderas, turbinas y generadores. Sin embargo, el desarrollo de sistemas de potencia integrados e interconectados a otras compañías de potencia requiere no solamente considerar los costos incrementales por combustible, sino también las pérdidas incrementales por transmisión. De esta forma se disminuyen los costos de la energía suministrada.

Para determinar la distribución económica de la carga entre centrales hay que considerar las pérdidas en las líneas de transmisión. Aunque una unidad generadora sea eficiente, con unos costos incrementales de operación bajos, ésta puede estar localizada lejos del punto de demanda. Las pérdidas por transmisión asociadas a esta unidad generadora pueden ser tan grandes que el despacho económico de energía señale que se disminuya su potencia de salida. a la vez que sugiere aumentar la potencia de salida de unidades con costos incrementales de producción más altos pero con pérdidas por transmisión bajas. Como podemos observar, las pérdidas por transmisión juegan un papel importante en la distribución económica de carga.

En este artículo se presenta una simple y breve introducción de los conceptos, técnicas y cómputos necesarios para desarrollar y determinar los coeficientes B_{mn} de la ecuación de pérdidas para un sistema de generación de potencia.

Calculation of the loss equation coefficients (B_{mn}) for a power generation system

Abstract

Engineering has been very successful in the analysis of fuel costs, performance and efficiency of boilers, turbines, and generators. However, with the development of integrated power systems and the interconnection of operating companies, it is necessary to consider not only the incremental fuel costs but also the incremental transmission losses for optimum economy.

In determining the economic distribution of load between plants we encounter the need to consider losses in the transmission lines. Although the incremental fuel cost at one plant bus may be lower, this plant may be much farther from the load center. The losses in transmission from this plant may be so great that economy may dictate lowering the power delivered to the load. While other plants with higher incremental cost but lower transmission losses may increase their delivered power. Transmission losses consideration has often proved to be important in the economic distribution of load.

This paper includes a simple and brief introduction of the theoretical concepts and mathematical techniques involved in determining the loss equation coefficients (B_{mn}).

Introducción

Al operar un sistema de potencia para una condición específica de carga es muy importante desarrollar un programa de generación eficiente. El programa debe considerar los efectos producidos por los costos incrementales de producción, así como las pérdidas incrementales por transmisión. De esta manera se puede minimizar el costo de la energía producida.

Para coordinar las pérdidas por transmisión con el problema de distribución económica de carga es necesario expresar el total de las pérdidas de energía por transmisión en función de las potencias de los generadores. Las pérdidas por transmisión se deben a la impedancia que tienen las líneas de transmisión. Esto significa que mientras más distante esté la unidad generatriz de las cargas, mayores serán las pérdidas en transmisión.

Para calcular las pérdidas se realizan estudios de flujo de potencia a varios niveles de carga: carga baja, carga intermedia y carga pico. Se determina un conjunto de coeficientes de pérdidas B_{mn} con el cual se hace un arreglo matricial para calcular las pérdidas. Los coeficientes se calculan para condiciones de funcionamiento a carga intermedia. Se presume que no se producen diferencias de carga excesivas entre las centrales o en la carga total. Se adopta la hipótesis de que todas las corrientes de carga están en relación constante con la corriente total de carga y se deduce una expresión simplificada de la ecuación de pérdidas para un número cualquiera de fuentes de generación de la forma:

$$P_L = \sum_m \sum_n P_m B_{mn} P_n \qquad (1)$$

Debido a la importancia económica, se desarrollan nuevas investigaciones dirigidas a estudiar y obtener nuevos y mejores métodos para determinar los coeficientes de pérdidas por transmisión. Entre los métodos de mayor transcendencia está el uso de la computadora digital, el cual permite reducir los costos y mejorar la precisión de los resultados obtenidos para determinar los coeficientes de pérdidas.

El conocimiento detallado en la solución de sistemas eléctricos a base de técnicas computacionales es bien importante para las aplicaciones prácticas. Por esta razón se desarrolló un programa para computadoras que calcula los coeficientes B_{mn} para la expresión simplificada de la fórmula de pérdidas. El programa calcula un conjunto de coeficientes para determinado sistema de potencia. El producto de estos coeficientes y la potencia generada nos provee las pérdidas de transmisión del sistema eléctrico. El programa permite analizar un sistema de **n** nodos, donde cualesquiera de ellos puede ser nodo de generación. Se utilizó el lenguaje C para desarrollar el programa por su gran capacidad y facilidad para efectuar operaciones matriciales además de su rápida y simple forma de operar. En el artículo se discuten los aspectos fundamentales que intervienen en el cálculo de dichos coeficientes.

Exposición del problema

El elemento fundamental para determinar las pérdidas por transmisión de un sistema de potencia eléctrica es establecer una fórmula que exprese el total de esas pérdidas como función de las potencias de los generadores. Para ver con más claridad los principios que intervienen en dicha expresión, determinaremos las pérdidas de un sistema formado de varias centrales generadoras, conectadas a su vez a varias cargas a través de una red de transmisión arbitraria. La figura 1 presenta un sistema de este tipo donde:

E_{Gn}, i_{Gn} = voltaje y corrriente fasorial de los generadores
E_{Lk}, i_{Lk} = voltaje y corriente fasorial de las cargas

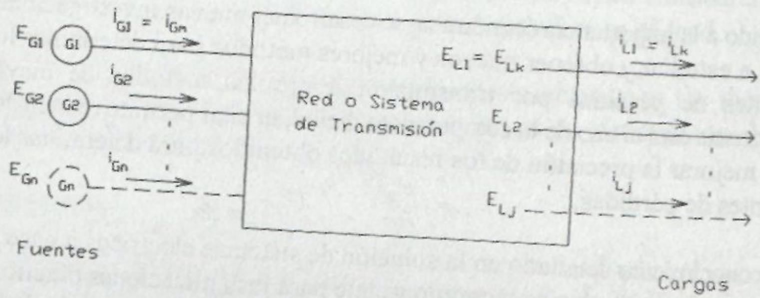

Figura 1. Sistema general de potencia de un número n de centrales generadoras conectadas a un número j de cargas

Para expresar las pérdidas por transmisión como función de las potencias de los generadores, en el sistema eléctrico de la figura 1 se adopta la configuración que presenta la figura 2. Las pérdidas por transmisión que se obtienen de los sistemas representados por las figuras 1 y 2 son equivalentes y se expresan de la siguiente forma:

para el sistema de la figura 1

$$P_L = \sum I_k^2 R_k \tag{2}$$

donde I_k es la corriente escalar en la línea k y R_k es la resistencia de la línea k y para el sistema de la figura 2

$$P_L = \sum_m \sum_n P_m B_{mn} P_n \tag{3}$$

y P_L representa el total de pérdidas por transmisión, las sumas son independientes para incluir todas las fuentes, P_m y P_n son las fuentes de potencia del sistema y B_{mn} representa los coeficientes de la ecuación de pérdidas.

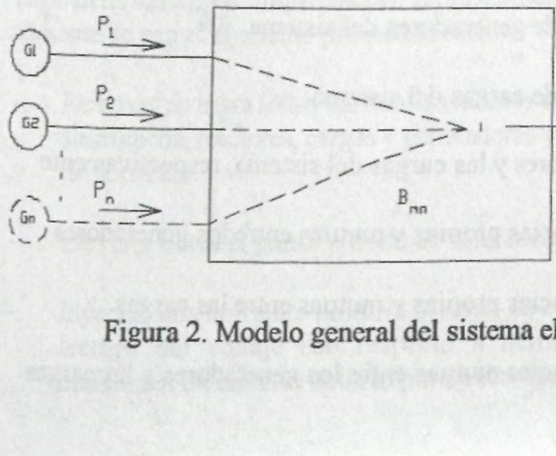

Figura 2. Modelo general del sistema eléctrico

Matriz de impedancia para el sistema de transmisión

La matriz de impedancia es de suma importancia para ciertos estudios de sistemas de potencia, como lo es el estudio de las pérdidas por transmisión. En el desarrollo de la ecuación general de pérdidas, las pérdidas por transmisión del sistema se expresan con la matriz de impedancia del sistema. Para determinar la matriz de impedancia compleja del sistema seleccionamos de entre cualesquiera de los puntos de la red de transmisión representada en la figura 1 como el punto o nodo (barra) de referencia R. Se acostumbra usar el generador de mayor capacidad como el punto o nodo de referencia R.

La expresión que relaciona los voltajes con las corrientes de los nodos por medio de la matriz de impedancia se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$[E]_{barra} = [Z]_{barra} \; [I]_{barra} \tag{4}$$

La ecuación (5) es la expresión general en forma matricial de la ecuación (4). En este caso los parámetros representan lo siguiente:

m,n número de generadores del sistema

j,k número de cargas del sistema

G,L generadores y las cargas del sistema, respectivamente

Z_{GmGn} impedancias propias y mutuas entre los generadores

Z_{LjLk} impedancias propias y mutuas entre las cargas

Z_{GmLk}, Z_{LjGn} impedancias mutuas entre los generadores y las cargas

Z_{barra} matriz de impedancia para el sistema general de potencia con respecto al punto de referencia R

$$\begin{bmatrix} E_{G1} \\ E_{G2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{Gn} \\ E_{L1} \\ E_{L2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{Lj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{G1G1} & Z_{G1G2} & \cdots & Z_{G1Gn} & Z_{G1L1} & Z_{G1L2} & \cdots & Z_{G1Lj} \\ Z_{G2G1} & Z_{G2G2} & \cdots & Z_{G2Gn} & Z_{G2L1} & Z_{G2L2} & \cdots & Z_{G2Lj} \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ Z_{GnG1} & Z_{GnG2} & \cdots & Z_{GnGn} & Z_{GnL1} & Z_{GnL2} & \cdots & Z_{GnLj} \\ Z_{L1G1} & Z_{L1G2} & \cdots & Z_{L1Gn} & Z_{L1L1} & Z_{L1L2} & \cdots & Z_{L1Lj} \\ Z_{L2G1} & Z_{L2G2} & \cdots & Z_{L2Gn} & Z_{L2L1} & Z_{L2L2} & \cdots & Z_{L2Lj} \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ Z_{LjG1} & Z_{LjG2} & \cdots & Z_{LjGn} & Z_{LjL1} & Z_{LjL2} & \cdots & Z_{LjLj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{G1} \\ I_{G2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{Gn} \\ I_{L1} \\ I_{L2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{Lj} \end{bmatrix} \quad (5)$$

El vector columna [E] representa los voltajes en los nodos del sistema con respecto al punto de referencia. El vector columna [I] representa las corrientes inyectadas a dichos nodos.

Para determinar las impedancias representadas por la ecuación (5), generalmente se usa el siguiente procedimiento:

- Remover de tierra todos los condensadores estáticos, condensadores sincrónicos, reactores, cargas y generadores y convertirlos en fuentes de corriente.

- Llevar a tierra el punto o nodo de referencia R.

- Inyectar una corriente unitaria al nodo en consideración y tomar la lectura del voltaje con respecto a tierra. Los otros nodos se mantienen en circuito abierto para hacer las corrientes cero.

- Las corrientes inyectadas a los nodos fluyen de los generadores o van hacia las cargas u otros componentes del sistema.

- Por convención, se consideran como positivas todas las corrientes entrando a los nodos.

La matriz de impedancia Z_{barra} de una red eléctrica representa un modelo matemático equivalente. Con esta matriz se pueden expresar explicitamente los voltajes en los nodos en términos de las corrientes de los nodos. La matriz de impedancia es una de estructura bien definida que se basa en las siguientes propiedades:

- es una matriz cuadrada de orden n x n.

- es simétrica porque $Z_{kj} = Z_{jk}$.

- es compleja porque $Z_{kj} = R_{kj} + jX_{kj}$

El concepto de transformación

El problema de las pérdidas por transmisión se formula generalmente sobre la base de la matriz de impedancia del sistema eléctrico. Para esto hay que transformar la matriz del sistema original a una matriz de impedancia en términos del número de generadores del sistema. Para lograr dicha transformación utilizamos el concepto de la matriz de transformación [C].

La matriz de transformación [C] nos permite modificar el circuito original en términos de un nuevo circuito, sin que la potencia de entrada del circuito original se afecte o varíe. En general, G. Kron[1] demostró que el conjunto de corrientes $I_{original}$ ("I_{old}") que corresponden al circuito original se pueden

[1]Early, E. D. et al, 1955, "A General Transmission Loss Equation, AIEE Transactions, Vol. 74, Parte III, Junio, p. 730-735

relacionar con un nuevo conjunto de corrientes I_{nueva} ("I_{new}") mediante la matriz de transformación [C]. Esto significa que:

$$[I_{original}] = [C] \quad [I_{nueva}] \tag{6}$$

pero, como la potencia no sufre cambios debido a la transformación, el nuevo conjunto de voltajes se representa como:

$$[E_{nueva}] = [C_t^*] \quad [E_{original}] \tag{7}$$

mientras que la nueva matriz de impedancia se expresa de la siguiente forma:

$$[Z_{nueva}] = [C_t^*] \quad [Z_{original}] \quad [C] \tag{8}$$

donde $[C^*]$ es la matriz conjugada de la matriz [C] y $[C_t^*]$ es la matriz transpuesta de la conjugada de la matriz [C].

Transformación al segundo marco de referencia

Consideremos un sistema de potencia que consta de tres generadores y dos cargas, respectivamente. La matriz de impedancia para el sistema original será de la forma de la ecuación (9).

$$Z_{original} = \begin{bmatrix} Z_{G1G1} & Z_{G1G2} & Z_{G1G3} & Z_{G1L1} & Z_{G1L2} \\ Z_{G2G1} & Z_{G2G2} & Z_{G2G3} & Z_{G2L1} & Z_{G2L2} \\ Z_{G3G1} & Z_{G3G2} & Z_{G3G3} & Z_{G3L1} & Z_{G3L2} \\ Z_{L1G1} & Z_{L1G2} & Z_{L1G3} & Z_{L1L1} & Z_{L1L2} \\ Z_{L2G1} & Z_{L2G2} & Z_{L2G3} & Z_{L2L1} & Z_{L2L2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Debido a que la ecuación de pérdidas se expresa en función de las potencias de los generadores, hay que eliminar todas las corrientes de cargas como variables. Es importante mencionar que en la corriente equivalente de carga en cada nodo se incluye la potencia reactiva suplida por los condensadores estáticos, condensadores sincrónicos y reactores. Para ello se adopta la hipótesis de que todas las corrientes de carga están en relación constante con la corriente total de carga. Es decir, si:

$$i_L = \sum_j i_{L\,j} \tag{10}$$

entonces, según la hipótesis:

$$I_{L\,j} = l_j\, i_L \quad , \quad l_j = l_j' + j l_j'' \tag{11}$$

donde l_j (rho) representa la razón de cambio compleja de la corriente de carga j con respecto a la corriente total i_L. Para nuestro sistema de ejemplo

$$[I_{original}] = \begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \\ i_{G3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$[I_{nueva}] = \begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \\ i_{G3} \\ l_1 i_L \\ l_2 i_L \end{bmatrix} \tag{13}$$

Aplicando el concepto de matriz de transformación (ecuación 5) a las corrientes, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \\ i_{G3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \\ i_{G3} \\ i_L \end{bmatrix} \tag{14}$$

Luego determinamos la nueva matriz de impedancia $[Z_{nueva}]$ según la ecuación (8). Efectuando el producto $[Z_{original}]$ $[C]$, obtenemos:

$$[Z_{original}]\,[C] = \begin{bmatrix} Z_{G1G1} & Z_{G1G2} & Z_{G1G3} & (Z_{G1L1}l_1 + Z_{G1L2}l_2) \\ Z_{G2G1} & Z_{G2G2} & Z_{G2G3} & (Z_{G2L1}l_1 + Z_{G2L2}l_2) \\ Z_{G3G1} & Z_{G3G2} & Z_{G3G3} & (Z_{G3L1}l_1 + Z_{G3L2}l_2) \\ Z_{L1G1} & Z_{L1G2} & Z_{L1G3} & (Z_{L1L1}l_1 + Z_{L1L2}l_2) \\ Z_{L2G1} & Z_{L2G2} & Z_{L2G3} & (Z_{L2L1}l_1 + Z_{L2L2}l_2) \end{bmatrix} \tag{15}$$

El producto $[C_t^*]$ $\{[Z_{original}]$ $[C]$ resulta en la nueva matriz de impedancia de la ecuación (16)

$$[Z_{nueva}] = \begin{bmatrix} Z_{G1G1} & Z_{G1G2} & Z_{G1G3} & a_1 \\ Z_{G2G1} & Z_{G2G2} & Z_{G2G3} & a_2 \\ Z_{G3G1} & Z_{G3G2} & Z_{G3G3} & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & W \end{bmatrix} \tag{16}$$

donde:

$$a_1 = Z_{G1L1}l_1 + Z_{G1L2}l_2\,, \quad a_2 = Z_{G2L1}l_1 + Z_{G2L2}l_2$$
$$a_3 = Z_{G3L1}l_1 + Z_{G3L2}l_2 \tag{17}$$

$$b_1 = l_1^* Z_{L1G1} + l_2^* Z_{L2G1} \;,\; b_2 = l_1^* Z_{L1G2} + l_2^* Z_{L2G2}$$
$$b_3 = l_1^* Z_{L1G3} + l_2^* Z_{L2G3} \tag{18}$$

$$W = l_1^* Z_{L1L1} l_1 + l_1^* Z_{L1L2} l_2 + l_2^* Z_{L2L1} l_1 + l_2^* Z_{L2L2} l_2 \tag{19}$$

En general, la expresión que relaciona el voltaje, la impedancia y la corriente del sistema es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} E_{Gm} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{GmGn} & \cdot & \cdot & a_m \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ b_n & \cdot & \cdot & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Gn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_L \end{bmatrix} \tag{20}$$

donde

$$a_m = Z_{GmLk}\, l_k \;,\quad b_n = l_j^* Z_{LjGn} \tag{21}$$

$$W = W' + j\,W'' = l_j^* Z_{LjLk} \;,\quad E_l = l_j^* E\, l_j \tag{22}$$

Egm es la caída de voltaje debido al flujo de la corriente total de carga i_L, E_L es la caída de voltaje debido al flujo de la corriente de los generadores i_{Gn} y W representa la impedancia propia entre el punto de referencia y la carga hipotética.

Transformación al tercer marco de referencia

En el desarrollo de la ecuación (20), la corriente individual de cada carga se expresó en términos de la corriente total de carga i_L. Para expresar la ecuación de pérdidas en función de las potencias de los generadores hay que eliminar i_L como variable. Dicha operación se logra mediante la siguiente relación:

$$i_L = -\sum_{n} i_{Gn} \tag{23}$$

La suma algebraica de las corrientes de los generadores es igual en magnitud, pero en dirección opuesta a la suma algebraica de las corrientes de las cargas. Para nuestro sistema lo expresamos como sigue:

$$\begin{gathered} i_{G1} = i_{G1}\ , \quad i_{G2} = i_{G2}\ , \quad i_{G3} = i_{G3} \\ i_L = -(i_{G1} + i_{G2} + i_{G3}) \end{gathered} \tag{24}$$

Aplicando el concepto de matriz de transformación a las corrientes del sistema original expresado en la ecuación (6) tenemos

$$\begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \\ i_{G3} \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{G1} \\ i_{G2} \\ i_{G3} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Como la ecuación (8) representa la nueva matriz de impedancia, entonces

$$[C_t^*]\ [Z_{original}] = \begin{bmatrix} (Z_{G1G1} & -b_1)(Z_{G1G2} & -b_2)(Z_{G1G3} & -b_3)(a_1 & -W) \\ (Z_{G2G1} & -b_1)(Z_{G2G2} & -b_2)(Z_{G2G3} & -b_3)(a_2 & -W) \\ (Z_{G3G1} & -b_1)(Z_{G3G2} & -b_2)(Z_{G3G3} & -b_3)\ (a_3 & -W) \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$Z_{nueva} = \begin{bmatrix} (Z_{G1G1} - b_1 - a_1 + W)(Z_{G1G2} - b_2 - a_1 + W)(Z_{G1G3} - b_3 - a_1 + W) \\ (Z_{G2G1} - b_1 - a_2 + W)(Z_{G2G2} - b_2 - a_2 + W)(Z_{G2G3} - b_3 - a_2 + W) \\ (Z_{G3G1} - b_1 - a_3 + W)(Z_{G3G2} - b_2 - a_3 + W)(Z_{G3G3} - b_3 - a_3 + W) \end{bmatrix} \tag{27}$$

La expresión general para la nueva matriz de impedancia es:

$$Z_{mn} = Z_{GmGn} - a_m - b_n + W = R_{mn} + j\,X_{mn} \tag{28}$$

Después de la segunda transformación, la expresión general que relaciona el voltaje, la impedancia y la corriente del sistema es:

$$[E_{Gm}] = [Z_{GmGn} - a_m - b_n + W]\,[i_{Gn}] = [Z_{mn}]\,[i_{Gn}] \tag{29}$$

donde Z_{mn} representa la nueva matriz de impedancia en términos de las corrientes de los generadores.

Mediante el desarrollo de la fórmula de pérdidas, la matriz de impedancia del sistema original experimenta dos tipos de transformaciones como resultado de aplicar el concepto de matriz de transformación [C]. Para distinguir entre ambas transformaciones llamaremos a la primera transformación segundo marco de referencia, mientras que a la segunda transformación la llamaremos tercer marco de referencia. Lógicamente, el primer marco de referencia representa la etapa donde se determinó la matriz de impedancia del sistema original. Estos marcos de referencia representan el modelo matemático presentado por Kron para desarrollar la fórmula de pérdidas propuesta por E. George en 1943.

Cálculo de las pérdidas por transmisión

Luego de calcular Z_{mn} ya disponemos de la base para calcular las pérdidas por transmisión del sistema. Para un sistema general, las pérdidas reales son:

$$P_L = \Re \left\{ [I_3^*]\ [E_3] \right\} = \Re \left\{ [I_3^*]\ [Z_3]\ [I_3] \right\} \tag{30}$$

donde $\Re$ representa la parte real de la expresión.

Si i_{dn} e i_{gn} son los componentes reales e imaginarios de las corrientes de los generadores i_{Gn}, respectivamente, entonces:

$$I_n = i_{Gn} = i_{dn} + j i_{gn} \qquad I_{Gn}^* = i_{Gn}^* = i_{dn} - j i_{gn} \tag{31}$$

Se sustituyen las ecuaciones (28) y (31) en la ecuación (30) y se obtiene:

$$\begin{aligned} P_L &= \Re\, I_m^* Z_{mn} I_n = \Re(i_{dm} - j i_{gm})\,(R_{mn} + jX_{mn})\,(i_{dn} + j i_{gn}) \\ &= \Re(i_{dm} - j i_{gm})(R_{mn} i_{dn} + jR_{mn} i_{gn} + jX_{mn} i_{dn} - jX_{mn} i_{gn}) \\ &= \Re(i_{dm}K_1 + j i_{dm}K_2 + j i_{dm}K_3 - i_{dm}K_4 - j i_{gm}K_1 + i_{gm}K_2 + i_{gm}K_3 + j i_{gm}K_4) \\ &= \Re(i_{dm}K_1 + j i_{dm}K_2 - i_{dm}K_4 + i_{gm}K_3) + J(i_{dn}K_2 - i_{gm}K_1 + i_{dm}K_3 + i_{gn}K_4) \\ &= \Re(i_{dm}K_1 + i_{dm}K_2 - i_{dm}K_4 + i_{gm}K_3) \end{aligned} \tag{32}$$

donde

$$K_1 = R_{mn} i_{dn}\ ,\ K_2 = R_{mn} i_{gn}\ ,\ K_3 = X_{mn} i_{dn}\ ,\ K_4 = X_{mn} i_{gn} \tag{33}$$

Los primeros dos términos de P_L son de la forma $P_j A_{jk} P_k$, por lo tanto R_{mn} se puede expresar en términos de la parte simétrica real

$$\frac{(R_{mn} + R_{nm})}{2} \tag{34}$$

Al sustituir esta relación en la ecuación (32) obtenemos:

$$P_L = i_{dm} \frac{(R_{mn} + R_{nm})}{2} i_{dn} + i_{gm} \frac{(R_{mn} + R_{nm})}{2} i_{gn} - i_{dm} X_{mn} i_{gn} + i_{gm} X_{mn} i_{dn} \tag{35}$$

Como $X_{mn} = X_{nm}$, entonces:

$$i_{gm}X_{mn}i_{dn} = i_{dm}X_{nm}i_{gn} \quad \text{ó} \quad - i_{dm}(X_{mn} - X_{nm})i_{gn} \tag{36}$$

Se multiplica y divide por 2 en la expresión anterior y se tiene que:

$$- 2\ i_{dm}\ \frac{(X_{mn} - X_{nm})}{2}\ i_{gn} \tag{37}$$

Luego se sustituye la ecuación (37) en P_L para obtener:

$$P_L = i_{dm}[\frac{R_{mn}+R_{nm}}{2}]i_{dn} - 2i_{dm}[\frac{X_{mn} - X_{nm}}{2}]\ i_{gn} + i_{gm}[\frac{R_{mn}+R_{nm}}{2}]i_{gn} \tag{38}$$

La ecuación (38) representa la ecuación de pérdidas expresada en términos del componente simétrico y antisimétrico de Z_{mn}. Nuevamente, considerando la parte simétrica de la ecuación (28) obtenemos:

$$\frac{R_{mn}+R_{nm}}{2} = \Re\frac{1}{2}[Z_{mn}+Z_{nm}] = R_{mn} = R_{GmGn} - d_m - d_n + W' \tag{39}$$

donde:

$$d_m = \Re(\frac{a_m + b_m}{2}) = R_{LkGm}\ l_k' \tag{40}$$

$$d_n = \Re(\frac{a_n + b_n}{2}) = R_{LkGn}\ l_k' \tag{41}$$

$$W' = \Re W = I_j' R_{LjLk} I_k' + I_j'' R_{LjLk} I_k'' - I_j' X_{LjLk} I_k'' + I_j'' X_{LjLk} I_k' \tag{42}$$

Para calcular el término W', según expresa la ecuación (42), es imprescindible calcular todas las impedancias propias y mutuas entre las cargas (Z_{LjLk}). Por ejemplo, para un sistema de 50 cargas, hay que calcular 2,500 (50 x 50) impedancias Z_{LjLk}. Si calculamos W' para un sistema de este tipo con la ecuación (42), el proceso computacional es extremadamente extenso. Para obtener un procedimiento más corto, se desarrolló un método en el cual dichos valores se pueden determinar de forma empírica. La expresión empírica de W' se representa con la siguiente ecuación:

$$W' = \frac{\sum I_k^2 R_k - P_m A_{mn} P_n + P_m H_{mn}(f_m - f_n) P_n}{P_m K_{mn} P_n} \tag{43}$$

Si consideramos el componente antisimétrico de Z_{mn}, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{X_{mn} - X_{nm}}{2} &= \frac{-2R_{GmLK} I_K'' + 2R_{GnLK} I_K''}{2} \\ &= -R_{GmLK} I_K'' + R_{GnLK} I_K'' = -f_m + f_n \end{aligned} \tag{44}$$

donde

$$f_m = R_{GmLk} I_k'' \quad \text{y} \quad f_n = R_{GnLk} I_k'' \tag{45}$$

Luego se sustituyen las ecuaciones (38) y (43) en la ecuación (37) y se obtiene la expresión general de la fórmula de pérdidas para determinado sistema de potencia eléctrica:

$$P_L = i_{dm}R_{mn}i_{dn} + i_{gm}R_{mn}i_{gn} + 2i_{dm}[f_m - f_n]i_{gn} \tag{46}$$

Conversión de las corrientes de los generadores a las potencias de los generadores

La ecuación (46) expresa las pérdidas por transmisión del sistema en términos de las corrientes de los generadores. Generalmente los despachos económicos de carga se realizan en términos de las potencias de los generadores. Por tal razón, hay que expresar la fórmula de pérdidas de la ecuación (46) en términos de las potencias de los generadores.

Para expresar las corrientes de los generadores en términos de las potencias, tenemos que considerar la relación que hay entre ambos parámetros. Si el voltaje del generador m está adelantado respecto a la corriente, entonces la corriente del generador m se representa como sigue:

$$S_m = P_m + jQ_m = [E_m][I_m^*] \tag{47}$$

Despejando para $[I_m^*]$

$$[I_m^*] = \frac{P_m + jQ_m}{[E_m]} \tag{48}$$

$$[I_m] = \frac{P_m - jQ_m}{[E_m^*]} \tag{49}$$

pero, como

$$[E_m] = V_m(\cos\sigma_m + j\,\mathrm{sen}\,\sigma_m) \tag{50}$$

$$[E_m^*] = V_m(\cos\sigma_m - j\,\mathrm{sen}\,\sigma_m) \tag{51}$$

$$[I_m] = i_{Gm} = i_{dm} + j i_{gm} \tag{52}$$

Cuando se sustituye y se desarrollan las expresiones anteriores en la ecuación (49), se obtiene el componente real de la corriente de los generadores:

$$i_{dm} = \frac{P_m \cos\sigma_m + Q_m \,\mathrm{sen}\,\sigma_m}{V_m} \tag{53}$$

mientras que el componente imaginario se representa como sigue:

$$i_{gm} = \frac{P_m \,\mathrm{sen}\,\sigma_m - Q_m \cos\sigma_m}{V_m} \tag{54}$$

Como queremos ambas ecuaciones en términos de P_m, hay que eliminar Q_m como variable. Para ello adoptamos la hipótesis de que la magnitud del voltaje en cada nodo de generación permanece constante y los ángulos de fases también son constantes. Esto es, que $Q_m/P_m=S_m$ es constante; por lo tanto:

$$Q_m = S_m\, P_m \tag{55}$$

Se sustituye esta relación en las ecuaciones (53) y (54) y obtenemos las corrientes de los generadores en términos de S_m y P_m:

$$i_{dm} = \frac{1}{V_m} [\cos \sigma_m + S_m \text{ sen } \sigma_m] \, P_m \tag{56}$$

$$i_{gm} = \frac{-1}{V_m} [- \text{sen } \sigma_m + S_m \cos \sigma_m] \, P_m \tag{57}$$

Luego se sustituyen las ecuaciones (56) y (57) en la ecuación (46) para obtener una expresión para las pérdidas del sistema:

$$\begin{aligned} P_L &= P_m [\frac{1}{V_m V_n}((1+S_m S_n)\cos\sigma_{mn} + (S_m - S_n)\text{sen}\sigma_{mn})(R_{mn})] P_n \\ &\quad -2P_m [\frac{1}{V_m V_n}(-A_1 + A_2 - A_3 \; A_4)(f_m - f_n)] P_n \\ &= P_m K_{mn} R_{mn} P_n - 2P_m F_{mn} P_n \end{aligned} \tag{58}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos\sigma_m \, \text{sen}\sigma_n \qquad A_2 = S_n \cos\sigma_m \cos\sigma_n \\ A_3 &= S_n \, \text{sen}\sigma_m \, \text{sen}\sigma_n \qquad A_4 = S_m S_n \, \text{sen}\sigma_m \cos\sigma_n \end{aligned} \tag{59}$$

$$K_{mn} = \frac{1}{V_m V_n}[(1 + S_m S_n) \cos \sigma_{mn} + (S_m - S_n) \text{ sen } \sigma_{mn}] \tag{60}$$

$$F_{mn} = \frac{1}{V_m V_n} (-A_1 + A_2 - A_3 + A_4) \tag{61}$$

El término $-2P_m F_{mn} P_n$ de la ecuación (58) se expresa en la forma cuadrática, del cual, solamente la parte simétrica real de F_{mn} contribuye a las pérdidas. Si se expresa el término cuadrático $P_m F_{mn} P_n$ en su componente simétrico, tenemos:

$$\frac{F_{mn}+F_{nm}}{2}=\frac{1}{2V_mV_n}[(1+S_mS_n)\operatorname{sen}\sigma_{mn}+(S_n-S_m)\cos\sigma_{mn}](f_m-f_n)$$
$$=\frac{1}{2}H_{mn}(f_m-f_n) \tag{62}$$

donde

$$H_{mn}=\frac{1}{V_mV_n}[(1+S_mS_n)\operatorname{sen}\sigma_{mn}+(S_n-S_m)\cos\sigma_{mn})] \tag{63}$$
$$\sigma_{mn}=\sigma_m-\sigma_n$$

Sustituimos la ecuación (62) en la ecuación (58) y obtenemos la expresión general de la ecuación de pérdidas en su forma simplificada:

$$\begin{aligned} P_L &= P_mK_{mn}R_{mn}P_n-2P_m\frac{F_{mn}+F_{nm}}{2}P_n \\ &= P_mK_{mn}R_{mn}P_n-P_mH_{mn}(f_m-f_n)P_n \\ &= P_m[K_{mn}R_{mn}-H_{mn}(f_m-f_n)]P_n \\ &= P_mB_{mn}P_n \end{aligned} \tag{64}$$

donde

$$\begin{aligned} B_{mn} &= K_{mn}R_{mn}-H_{mn}(f_m-f_n) \\ &= A_{mn}+K_{mn}W'-H_{mn}(f_m-f_n) \end{aligned} \tag{65}$$

y en la cual

$$A_{mn}=K_{mn}(R_{GmGn}-d_n-d_m) \tag{66}$$

La figura 2 presenta el circuito equivalente correspondiente a la ecuación (64). En dicho sistema se reemplazan las corrientes de los generadores por sus potencias de salida. En la ecuación (65), los B_{mn} son los coeficientes de las fórmulas de pérdidas o coeficientes B_{mn}. Los coeficientes B_{mn} representan las pérdidas equivalentes de la red de transmisión, a través de la cual fluye la potencia de los generadores para suplir la demanda total del sistema. Estos coeficientes son constantes al variar las potencias de los generadores, siempre que los voltajes en los nodos de los generadores y los factores de potencia en las centrales generatrices mantengan un valor constante. Como $B_{mn} = B_{nm}$, el número de coeficientes de pérdidas que se calcula para un sistema de n generadores es [n*(n+1)]/2. Afortunadamente, el uso de valores constantes para los coeficientes de pérdidas en la ecuación (64) proporciona resultados satisfactorios.

Hipótesis adoptadas en el desarrollo de la ecuación de pérdidas

Las pérdidas por transmisión producidas en un sistema de potencia pueden determinrse mediante la aplicación de la ecuación de pérdidas en su forma simplificada:

$$P_L = \sum_m \sum_n P_m B_{mn} P_n \tag{67}$$

donde B_{mn} representa los coeficientes de la fórmula de pérdidas y P_m y P_n representan la potencia de los generadores.

Para elaborar los modelos matemáticos para determinar la fórmula de pérdidas se adoptaron varias hipótesis. Estas hipótesis simplifican y facilitan la formulación y solución del problema sin afectar significativamente la precisión de los resultados. Por tal razón, y para considerar los coeficientes como constantes, la ecuación de pérdidas por transmisión se desarrolló adoptando las siguientes hipótesis:

1. Todas las corrientes de carga están en relación constante con la corriente total de carga. Cuando las cargas sean no-conformes, se representan como fuentes negativas en la fórmula de pérdidas. En estos casos especiales, la fórmula de pérdidas incluye un término lineal y un término constante en adición al término cuadrático. Esta nueva expresión

(ecuación general de pérdidas - forma expandida) es de la forma:

$$P_L = \sum_m \sum_n P_m B_{mn} P_n + \sum_n B_{n0} P_n + B_{00} \tag{68}$$

2. La magnitud del voltaje en el nodo de cada fuente permanece constante.

3. Los ángulos de fases de los voltajes en los nodos permanecen constantes. Esta hipótesis es equivalente a admitir que las corrientes de los generadores mantienen ángulos de fase constantes respecto a una referencia común. Esto se debe a que los factores de potencia de los generadores se presumen constantes.

4. El factor de potencia de cada fuente no varía. Esto significa que la relación $Q_m/P_m = S_m$ es constante.

Desarrollo de la relación constante Q/P

Al determinar los coeficientes de pérdidas para un sistema de generación eléctrica, la operación más importante en dicho proceso es la selección de la relación constante Q/P. Para calcular la relación constante se deben realizar estudios de flujo de potencia a diferentes niveles de carga; carga baja, carga intermedia y carga pico. El análisis a carga intermedia se realiza con el propósito de verificar la validez de la fórmula de pérdidas. Del conjunto de estudios de flujo de potencia que se realicen a carga pico y a carga baja, se selecciona un análisis base para carga pico y otro para carga baja.

Los puntos Q y P que se obtienen de los estudios de flujo de potencia se ajustan a una línea recta que pasa a través del punto del estudio base. Para construir la línea recta que une los puntos Q y P se utiliza la característica reactiva del generador. Para cada generador del sistema se construye su característica reactiva. La pendiente que se obtiene de cada unidad generadora representa la relación constante Q/P. Se selecciona un valor de Q/P a carga pico y otro a carga baja. El valor de Q/P es más preciso cuando se obtiene mediante la representación gráfica.

No obstante, hay ocasiones en que solamente se utiliza como estudio base el análisis de flujo de potencia a carga intermedia. La relación Q/P se puede obtener de un estudio de flujo de potencia para calcular los coeficientes (caso base) si el estudio simula las condiciones típicas o normales de funcionamiento del sistema.

Generalmente, los niveles de carga seleccionados como casos base fluctúan entre el 85% y el 55% de la carga pico. Estos niveles de carga representan con bastante fidelidad el nivel de carga que el sistema suple durante el ciclo diario de carga. Las condiciones de generación para seleccionar los casos base de flujo de potencia deben simular las prácticas normales de operación del sistema.

Descripción del programa

Para calcular los coeficientes de pérdidas se desarrolló un conjunto de programas, el cual está organizado en el siguiente formato:

1. ZBARRA[2]

   Calcula la matriz de impedancia compleja del sistema original. El procedimiento utilizado para formar la matriz se basa en la conexión de elementos uno a uno. El programa se desarrolló fundamentado en las técnicas computacionales presentadas por Harper (1986). Para seleccionar el tipo de conexión deseada se utilizó la instrucción "switch" de lenguaje C. Los cuatro tipos de conexión se identificaron en el "switch" como tipo 1, 2, 3 y 4.

Para ejecutar el programa se requiere lo siguiente:

---

[2] Se basa en técnicas computacionales presentadas por Gilberto E. Harper en su libro Técnicas Computacionales en Sistemas Eléctricos de Potencia, 1986, Editorial Limusa, México, D.F.

- El nodo de referencia es el no⌐ ɔ número 1 (debe ser i_p).
- i_p siempre tiene que haber sido referido anteriormente.
- El primer elemento en el sistema tiene que estar conectado al nodo de referencia.

El programa siempre comienza ejecutando la conexión tipo 1. Esto se debe a que la matriz de impedancia del sistema se construye desde cero. En esta conexión el primer elemento con impedancia (Z_{elem}) se conecta desde el nodo de referencia al nuevo nodo i_q. Los otros elementos se van conectando de acuerdo al orden ascendente en que fueron numerados los nodos. Si hubiese que reeumerar el sistema original, hay que tener en cuenta el nuevo orden de los nodos. No se puede conectar un nuevo elemento entre dos nodos nuevos. Los elementos se pueden conectar en forma arbitraria, siempre que se cumplan las instrucciones anteriores.

ZBARRA se almacena en un archivo llamado zbarra.h. En este archivo ZBARRA actúa como una función que no devuelve valores. En lenguaje C, una función que no devuelve valores es el equivalente a una subrutina en Fortran. Sus instrucciones calculan los valores de la matriz de impedancia para usarlos en el programa BMN. Los valores reales de la matriz de impedancia se declaran externos (globales) para el programa BMN pueda tener acceso a ellos. La función zimp() en el programa BMN representa el programa ZBARRA. La figura 3 presenta el algoritmo general de ZBARRA.

2. BMN

El programa BMN calcula las pérdidas que se generan durante la transmisión de energía eléctrica a través de determinado sistema de transmisión. El mismo determina un conjunto de coeficientes B_{mn} calculados para las condiciones típicas o normales de funcionamiento del sistema.

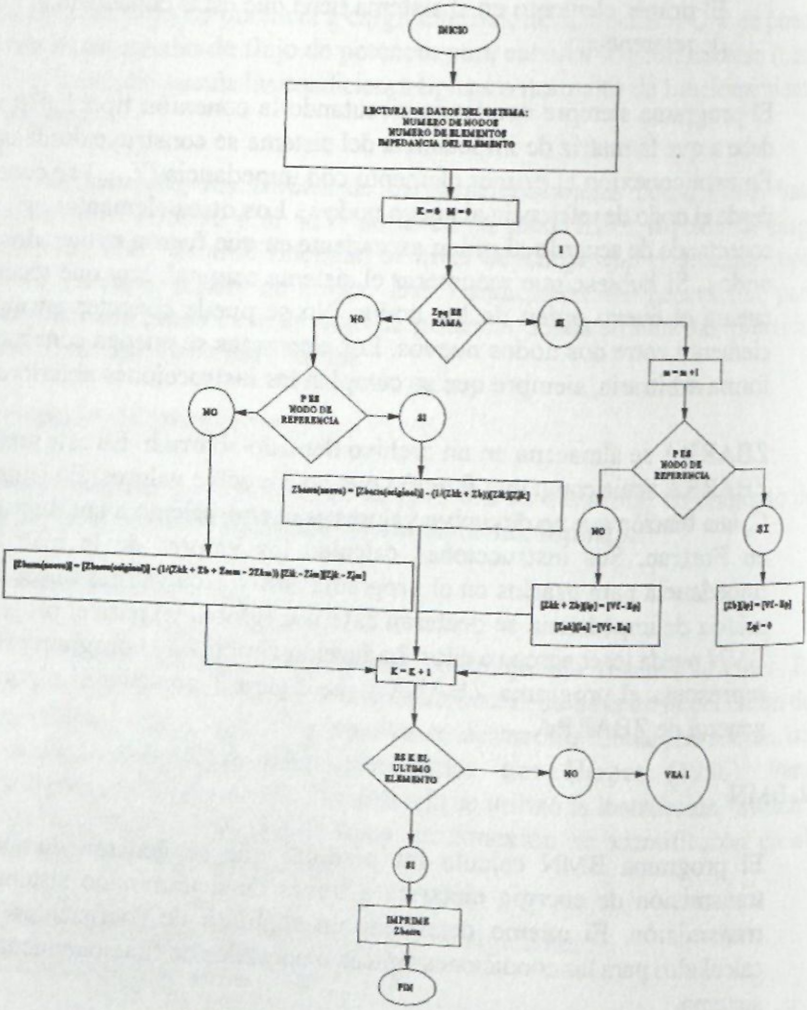

Figura 3. Algoritmo para la formación de ZBARRA

BMN calcula los coeficientes de pérdida para el estudio de flujo de potencia seleccionado como caso base. También calcula las pérdidas utilizando los coeficientes y las compara con las pérdidas I^2R. El programa tiene la alternativa de calcular las pérdidas para otros estudios de flujo de potencia utilizando los coeficientes calculados por el caso base. La figura 4 presenta el algoritmo general de BMN.

Método de correr el programa

El programa comienza asignando los valores de las variables de entrada del programa ZBARRA. El orden de entrar los datos es el siguiente:

- número de nodos (barras) del sistema
- número de elementos del sistema
- los nodos en los terminales del elemento
- la impedancia (resistencia y reactancia) del elemento

Los valores se obtienen del diagrama de impedancia del sistema analizado. El diagrama de impedancia se representa en por unidad, referido a una misma base de potencia.

ZBARRA produce como datos de salida los componentes reales (resistencias) e imaginarios (reactancia) de la matriz de impedancia compleja y nos regresa al programa BMN. Solamente los componentes reales de la matriz de impedancia se usan en el programa BMN.

En el programa BMN el orden de entrar los datos es el siguiente:

- número de nodos del sistema
- número de nodos de carga y de generación del sistema

- número asignado a cada nodo de carga y de generación
- magnitud de la potencia real (MW) y reactiva (MVAR) en los nodos de carga
- magnitud y ángulo de fase del voltaje en los nodos de carga
- magnitud de la potencia real (MW) y reactiva (MVAR) en los nodos de generación
- magnitud y ángulo de fase del voltaje en los nodos de generación
- potencia base en mega-voltios-amperes (MVA) del sistema

Los valores se obtienen del estudio base de flujo de potencia del sistema. La potencia real y reactiva se expresa en millones de vatios (MW) y millones de voltios-amperios-reactivos (MVAR), respectivamente. El voltaje en los nodos del sistema se expresa en por unidad.

Los datos de salida del programa BMN son:

- los nodos del sistema
- los coeficientes constantes B_{mn}
- la potencia real en cada nodo de generación
- las pérdidas por transmisión calculadas por los coeficientes B_{mn}, las cuales se denominan pérdidas determinadas
- las pérdidas actuales I^2R
- el porcentaje de diferencia entre las pérdidas calculadas por los coeficientes y las pérdidas actuales I^2R.

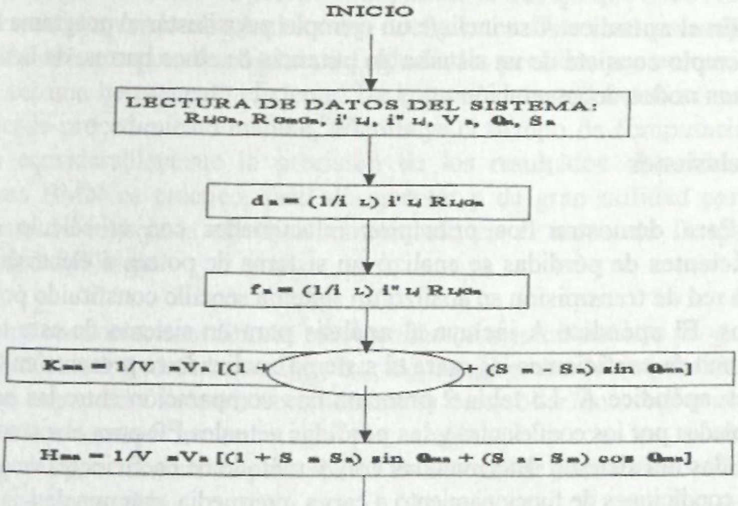

Figura 4. Algoritmo para calcular los coeficientes de la fórmula de pérdidas.

En el apéndice A se incluye un ejemplo para ilustar el programa BMN. El ejemplo consiste de un sistema de potencia de cinco barras, de las cuales tres son nodos de generación.

Conclusiones

Para demostrar los principios relacionados con el cálculo de los coeficientes de pérdidas se analizó un sistema de potencia eléctrica[3]. Para dicha red de transmisión se analizó un sistema sencillo constituido por cinco nodos. El apéndice A incluye el análisis para un sistema de este tipo. El conjunto de coeficientes B_{mn} para el sistema analizado se presenta en la tabla 1 del apéndice A. La tabla 2 presenta una comparación entre las pérdidas calculadas por los coeficientes y las pérdidas actuales I^2R para el sistema. Las pérdidas del sistema determinadas con el método de coeficientes se calculan para condiciones de funcionamiento a carga intermedia, con una desviación de 2 MW, lo cual es un pronóstico favorable.

A base de los resultados obtenidos del sistema ilustrativo, para sistemas de potencia en los cuales las corrientes de carga están en relación constante con la corriente total de carga, la ecuación de pérdidas en su forma simplificada produce unos valores satisfactorios. Aunque los resultados obtenidos mediante la ecuación de pérdidas en su forma simplificada predicen satisfactoriamente las pérdidas reales por transmisión, el programa tiene sus limitaciones. Por ejemplo, la precisión de los resultados se basa en cómo se seleccione la relación constante Q/P. Mientras más se elabore en esta relación, mejor precisión se obtiene. Como la fórmula de pérdidas se expresa en su forma simplificada, si analizamos sistemas con variaciones extremas en las condiciones de funcionamiento, puede haber errores considerables en los cálculos.

---

[3] Early, E. D. et al, 1955, "A General Transmission Loss Equation, AIEE Transactions, Vol. 74, Parte III, Junio, p. 730-735

Los programas BMN y ZBARRA simplifican el trabajo que debe realizar una persona interesada en calcular estos coeficientes. Esto demuestra que la aplicación de la computadora digital para calcular las pérdidas por transmisión resulta ser una herramienta eficiente. La computadora reduce el extenso y complicado procedimiento manual, disminuye el tiempo de computación y mejora considerablemente la precisión de los resultados obtenidos. El programa BMN es práctico, fácil de ejecutar y de gran utilidad para el estudiante de ingeniería eléctrica matriculado en el curso de Despacho Económico de Carga.

Como consideraciones futuras recomendamos ampliar nuestro programa para que calcule los coeficientes B_{mn}, B_{00}, B_{n0} con la ecuación de pérdidas en su forma expandida. Además recomendamos desarrollar un programa que coordine los costos incrementales por combustible con las pérdidas incrementales por transmisión para operar un sistema de potencia eléctrica al costo más bajo posible.

Apéndice 1

Ejemplo para ilustrar el funcionamiento del programa esarrollado

Para ilustrar la aplicación práctica de la ecuación de pérdidas (ecuación 64) a un sistema de potencia, se analizó un sistema sencillo de cinco nodos. De los cinco nodos, tres son de generación. Se identificó al sistema analizado como sistema A.

Se analizaron cinco estudios de flujo de potencia. Se utilizó el estudio de flujo de potencia número 3 para calcular la relación constante Q/P y los coeficientes de pérdidas. Este estudio se consideró como el estudio base de flujo de potencia para condiciones de funcionamiento a carga intermedia. En la tabla 1 se muestran los coeficientes de pérdidas para el sistema A.

Una vez calculados los coeficientes, estos se usaron para calcular las pérdidas por transmisión en los otros estudios de flujo de potencia. La tabla 2 incluye la comparación entre las pérdidas calculadas por los coeficientes de pérdidas y las pérdidas actuales I^2R para los cinco estudios de flujo de potencia.

Se analizaron cinco estudios de flujo de potencia con el objetivo de verificar la validez y precisión del programa BMN. Con ello queremos demostrar que al considerar los coeficientes B_{mn} como constantes, se pueden utilizar para calcular las pérdidas por transmisión para otros estudios de flujo de potencia.

Tabla 1. Coeficientes B_{mn}, para el sistema A calculados por BMN

Barra	Barra	B_{mn}
1	1	0.049861
1	2	-0.005548
1	5	-0.018658
2	1	-0.005548
2	2	0.024875
2	5	-0.032323
5	1	-0.018658
5	2	-0.032323
5	5	0.338328

Tabla 2. Pérdidas calculadas por B_{MN} para el sistema A

Descripción Caso	Barra	Potencia generador	Pérdidas esperadas	Pérdidas actuales	Porcentaje de diferencia
Base	1	10.66800			
	2	144.00000			
	5	34.60000			
			2.860080	2.868009	0.000008
Caso No. 1	1	77.1000			
	2	43.8000			
	5	73.5000			
			8.573982	7.994000	7.255220
Caso No. 2	1	45.5960			
1	2	93.0000			
	5	51.5000			
			3.859190	3.693000	4.500120
Caso No. 3	1	-22.1620			
	2	195.0000			
	5	18.2000			
			4.579960	4.637000	1.230100
Caso No. 4	1	-53.8720			
	2	244.0000			
	5	4.9000			
			8.560870	8.624000	0.732020