Propagación de radiofrecuencias a través del espacio interestelar

Modesto Iriarte Jr., Ph.D.
Member of the Governing Board
Puerto Rico Electric Power Authority
miriarte@prtc.net

SINOPSIS

Las estrellas Pulsars actúan como simples estaciones de radio de electro-magnetos rotatorios de dos polos. Estas se comportan como faros interestelares radiando al espacio pulsos de ondas electromagnéticas en la banda de microondas.

La radiación interestelar llega a nuestro planeta luego de haber cursado distancias del orden de miles de años luz e interaccionado con el plasma interestelar.

Estudiando la transmisión y dispersión de estas ondas por medio de la ecuaciones de Maxwell y de Newton, puede determinarse la distancia a estos Pulsars, así como otras características de interés. La interacción con la ionosfera terrestre de radio frecuencias puede ser significativa. El siguiente artículo demuestra como las ondas de radiofrecuencia menores de 9 MGHz, inclusive la banda AM , son reflejadas por la ionosfera terrestre, como pueden calcularse las distancias a los Pulsars por medio de la dispersión de frecuencias o como puede calcularse la concentración iónica del espacio.

El espacio no está vacío, como se encuentra escrito en muchos libros. Como mínimo se encuentran hasta 30,000 electrones por metro cúbico y otras partículas adicionales, polvo e hidrógeno neutral e ionizado.

El espacio puede considerarse como un plasma de baja densidad.

ABSTRACT

Pulsar stars act like simple radio stations consisting of a rotating two pole electromagnet. They behave like interstellar beacons radiating electromagnetic pulses in the microwave band.

The interstellar radiation reaches our planet after traveling distances of the order of thousands of light-years and after having interacted with the interstellar plasma.

By studying the transmission and dispersion of these waves by means of Maxwell and Newton equations, the distance to Pulsars can be determined as well as other interesting characteristics. The interaction of our ionosphere with these radiofrequencies can be significant. The following article shows how radiofrequency waves lower than 9 MGHz, and AM frequencies inclusive, are reflected by the earth ionosphere, and how the distance to Pulsars can be calculated by means of frequency dispersion and also how the ionic concentration in space can be calculated.

Space is not empty, as stated in many books. As a minimum there can be as many as 30,000 electrons per cubic meter and other particles, dust, and neutral and ionized hydrogen.

Space can be considered as a low density plasma.

I- INTRODUCCIÓN

Es muy bien conocido que la luz es una radiación electromagnética y que se propaga en el vacío a una velocidad c igual a 300,000 km por segundo.

La velocidad de propagación en un medio que no sea el vacío reduce la velocidad de propagación. Por ejemplo, la velocidad de la luz en el agua es mucho menor que la velocidad c en el vacío. Dividiendo la velocidad de la luz c en el vacío por la velocidad de la luz v en el medio donde se propaga la luz, resulta en lo que se conoce como índice de refracción. La raíz cuadrada del valor de la permitividad eléctrica, epsilon $\in$, del medio donde se propaga la luz es igual a la refracción del medio, o sea, es igual a la velocidad de la luz en el vacío dividido por la velocidad de la luz en el medio [1, 2, 3].

Índice de refracción $\eta = \dfrac{c}{v} = \sqrt{\in}$

Por otro lado, sigma σ es el factor de proporcionalidad entre la densidad de corriente eléctrica de conducción en cualquier punto del medio donde se propaga la luz y un punto específico en particular. Esta relación aplica igualmente a la radiación electromagnética en general, como radiofrecuencias, microondas, onda corta, onda larga, etc.

II- VECTORES EN ECUACIONES DE MAXWELL

Citaremos las ecuaciones de Maxwell en su forma vectorial. Recordemos que en el análisis vectorial se utiliza el sistema cartesiano, donde un vector se expresa en términos de sus componentes a lo largo de tres ejes mutuamente perpendiculares y denominados en la dirección x por i, en la dirección y por j, y en la dirección z por k. El vector unitario se expresa como $i+j+k$.

1- Dot Product

El producto llamado "*dot product*", que se expresa $\vec{E} \bullet \vec{I}$, multiplica la magnitud del vector $\vec{E}$ por la magnitud del vector $\vec{I}$ por el coseno del ángulo entre $\vec{E}$ e $\vec{I}$. El resultado es una cantidad escalar igual a $ExIx+EyIy+EzIz$. Si el vector $iEx+jEy+kEz$ está a 90 grados con relación al vector $iIx+jIy+kIz$, entonces $\vec{E} \bullet \vec{I} = 0$.

2- Cross Product

La expresión de multiplicación $\vec{E} \times \vec{I}$ llamado el "*cross product*", da como resultado un tercer vector que está perpendicular al plano que contiene a los vectores $\vec{E}$ e $\vec{I}$. La magnitud del producto de $\vec{E} \times \vec{I}$ es igual a $EI \sin \theta_{EI}$, e igual a

$$\vec{E} \times \vec{I} = (EyIz - EzIy)i + (EzIx - ExIz)j + (ExIy - EyIx)k.$$

3- Operador Delta ∇

El operador ∇ es el símbolo para gradiente o razón máxima de cambio de una función con respecto a una variable especificada. El operador ∇ recoge la apariencia de un vector y se trata como tal.

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

4- Divergencia

$$\text{Div}\,\vec{E} = \nabla \bullet \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}$$

5- Circulación

$$\text{Curl}\,\vec{E} = \nabla \times \vec{E} =$$

$$i\left(\frac{\partial Ez}{\partial y} - \frac{\partial Ey}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial Ex}{\partial z} - \frac{\partial Ez}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Ey}{\partial x} - \frac{\partial Ex}{\partial y}\right)$$

6- Ecuaciones de Maxwell – Forma Diferencial

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\vec{B}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

7- Ecuaciones del Medio

$$\vec{D} = \epsilon\,\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \bar{\sigma}_{mn} \bullet \vec{E}'',$$

donde $\bar{\sigma}_{mn}$ es un tensor de conductividad de (3x3) elementos.

$$\nabla \times \vec{H} = \bar{\varepsilon}_{mn} \bullet \vec{E}'',$$

donde $\bar{\varepsilon}_{mn}$ es un tensor de permitividad de (3x3) elementos. $\vec{E}''$ es el vector $iEx + jEy + kEz$

8- Ecuaciones de Fuerza

Newton: $\vec{F} = m\left(\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)$;

Coulomb: $\vec{F} = e\vec{E}$;

Faraday (inducc): $\vec{F} = e\left(\vec{V} \times \vec{B}\right)$

donde,

E = Intensidad de campo eléctrico, voltios/m

D = Desplazamiento debido a la densidad de cargas eléctricas, Coul/m^2

H = campo magnético, amp/m

J = densidad de corriente de conducción, amp/m^2

ρ = densidad de cargas, Coul/m^3

ϵ = permitividad del medio, farads/m

μ = permeabilidad del medio, henrys/m

σ = conductividad del medio, mhos/m

F = fuerza, Newtons

V = velocidad, m/seg

e = carga de partícula o electrón, Coul

m = masa de partícula, kg

Equilibrando la fuerza de gravedad con las electromagnéticas tenemos:

$$\vec{F} = m\frac{dv}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$$

dividiendo por e para expresar fuerza por unidad de carga eléctrica,

$$\frac{\vec{F}}{e} = \vec{E} + \left(\vec{V} \times \vec{B}\right) = \frac{m}{e}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

Expresando en término de los tres componentes axiales y expandiendo,

$$\frac{\vec{F}}{e} = \frac{(iFx + jFy + kFz)}{e} = (iEx + jEy + kEz) +$$
$$\left[(VyBz - VzBy)i + (VzBx - VxBz)j + (VxBy - VyBx)k\right]$$
$$= \frac{m}{e}\left[\frac{d(iVx + jVy + kVz)}{dt}\right]$$

Pero $Bx = By = 0$ (se asume que $\vec{B}$ es un vector alineado en cirección z).

Reagrupando y equiparando componentes axiales,

$$\frac{Fx}{e} = Ex + VyBz = \frac{m}{e}\left(\frac{dVx}{dt}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{Fy}{e} = Ey - VxBz = \frac{m}{e}\left(\frac{dVy}{dt}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{Fz}{e} = Ez = \frac{m}{e}\left(\frac{dVz}{dt}\right) \qquad (3)$$

Interesamos resolver éstas ecuaciones por Vz, Vy, Vz. Para resolverlas presumiremos una solución del siguiente formato:

$$Vx = Ux\xi^{j\omega t} \qquad (4)$$

$$Ex = E'x\xi^{j\omega t} \qquad (5)$$

donde Ux y $E'x$ representan valores fijos escalares en dirección x. Similarmente podemos presumir soluciones similares en las otras direcciones. $\xi^{j\omega t}$ representa un vector unitario rotando a una velocidad angular ω en radianes por segundo en dirección positiva, o contra las manecillas del reloj. (Esta es una solución clásica en el tratamiento de ecuaciones de ondas oscilatorias.) Esta solución presume que el movimiento de las partículas ($\vec{V}$) van a vibrar en unísonos con la vibración del campo eléctrico ($\vec{E}$).

Buscando derivadas de las ecuaciones (4) y (5), tenemos,

$$\frac{dVx}{dt} = j\omega Vx$$

$$\frac{d^2Vx}{dt^2} = (j\omega)^2 Vx = -\omega^2 Vx$$

$$\frac{dEx}{dt} = j\omega Ex$$

Buscando la derivada de la primera (1) ecuación de fuerza envolviendo la derivada $\frac{dVx}{dt}$ y recordando que $\vec{B}$ se presume un vector fijo a lo largo de z, para simplificar tenemos,

$$\frac{dEx}{dt} + Bz\frac{dVy}{dt} = \frac{m}{e}\left(\frac{d^2Vx}{dt^2}\right) \qquad (1B)$$

Con la segunda ecuación de fuerza resolvemos por $\frac{dVy}{dt}$:

$$\frac{dVy}{dt} = \frac{e}{m}(Ey - Vx\,Bz)$$

y substituyendo en (1B)

$$j\omega Ex + Bz\left[\frac{e}{m}(Ey - VxBz)\right] = \frac{m}{e}\left(-\omega^2\,Vx\right)$$

Agrupando factores de Vx,

$$\frac{e}{m}(Bz\,Ey)+j\omega Ex=\frac{e}{m}\left[(Bz)^2-\frac{m^2\omega^2}{e^2}\right]Vx$$

$$Vx=\frac{BzEy+j\frac{m}{e}\omega Ex}{(Bz)^2-\frac{m^2\omega^2}{e^2}} \qquad (1C)$$

Resolviendo por *Vy*, de la Ecuación 2 de fuerza:

$$Ey-VxBz=\frac{m}{e}\left(\frac{dVy}{dt}\right),$$

diferenciando ésta ecuación:

$$\frac{dEy}{dt}-Bz\frac{dVx}{dt}=\frac{m}{e}\left(\frac{d^2Vy}{dt^2}\right) \qquad (2B)$$

Recordando que en general,

$$Vn=Un\xi^{j\omega t}$$

$$\vec{E}=E'n\xi^{j\omega t}$$

e insertando los correspondientes subscritos tenemos,

$$\frac{dEy}{dt}=j\omega Ey$$

$$\frac{dVy}{dt}=j\omega Vy$$

$$\frac{d^2Vy}{dt^2}=(j\omega)^2 Vy=-\omega^2 Vy$$

$$\frac{dVx}{dt}=\frac{e}{m}(Ex+Vy\,Bz) \qquad \text{(1ra ecuación de fuerza)}$$

Substituyendo en la expresión 2B,

$$j\omega Ey-Bz\left[\frac{e}{m}(Ex+VyBz)\right]=\frac{m}{e}\left(\frac{d^2Vy}{dt^2}\right)$$

$$=\frac{m}{e}\left[(j\omega)^2 Vy\right]$$

$$j\omega Ey-Bz\left(\frac{e}{m}\right)Ex=\left[\left(\frac{e}{m}\right)Bz^2-\frac{m}{e}\omega^2\right]Vy$$

$$Vy=\frac{\left(\frac{m}{e}\right)j\omega Ey-BzEx}{Bz^2-\left(\frac{n\omega}{e}\right)^2} \qquad (2C)$$

Finalmente resolviendo por Vz, ecuación 3 de fuerza,

$$Ez=\frac{m}{e}\left(\frac{dVz}{dt}\right)$$

$$Vz=Uz\xi^{j\omega t}$$

$$\frac{dVz}{dt}=Vz(j\omega)$$

por lo tanto,

$$Ez=\frac{m}{e}(Vz\,j\omega)$$

$$Vz=-j\frac{eEz}{m\omega} \qquad (3C)$$

Para la condición de $Bz^2=\left(\frac{m\omega}{e}\right)^2$, *Vx* y *Vy* se hacen infinitos. Esto corresponde a lo que se conoce como la frecuencia crítica de *gyro* porque se reconoce como la frecuencia resonante de un ciclotrón. De la anterior relación se obtiene que $\omega_g=\frac{e\,Bz}{m}$.

En términos de frecuencia angular,

$$\omega_g=2\pi\upsilon_g \quad \text{radianes/seg}$$

donde υ_g es la frecuencia crítica de *gyro* en hertzs. Resolviendo por *Bz*,

$$Bz=\frac{m}{e}\omega_g$$

y eliminando *Bz* de las ecuaciones 1C y 2C tenemos,

$$Vx=\frac{e}{m}\left(\frac{\omega_g Ey+j\omega Ex}{\omega_g^2-\omega^2}\right)$$

$$Vy=\frac{e}{m}\left(\frac{-\omega_g Ex+j\omega Ey}{\omega_g^2-\omega^2}\right)$$

De la ecuación de Maxwell,

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}+j\omega\vec{D}=Ne\vec{V}+j\omega\in_0\vec{E} \tag{6}$$

donde N es la concentración electrónica $\left(\text{electrones}/_{\text{cm}^3}\right)$ del espacio y la cantidad $Ne\vec{V}$ representa la corriente electrónica de conducción. La corriente de desplazamiento $\vec{D}$ (efecto de condensador) está representada por la permitividad dieléctrica del espacio $\in_0$ multiplicada por el campo eléctrico $\vec{E}$.

La ecuación (6) puede expresarse en términos de los tres componentes axiales:

$$\left(\nabla\times\vec{H}\right)x=NeVx+j\omega\in_0 Ex$$

$$\left(\nabla\times\vec{H}\right)y=NeVy+j\omega\in_0 Ey$$

$$\left(\nabla\times\vec{H}\right)z=NeVz+j\omega\in_0 Ez$$

Substituyendo los valores de *Vx, Vy* y *Vz* con las ecuaciones 1C, 2C y 3C tenemos,

$$\left(\nabla\times\vec{H}\right)x=j\omega\in_0 Ex\left(1+\frac{Ne^2}{\in_0 m\left(\omega_g^2-\omega^2\right)}\right)+\frac{Ne^2\omega_g Ey}{m\left(\omega_g^2-\omega^2\right)} \tag{7}$$

$$\left(\nabla\times\vec{H}\right)y=\frac{-Ne^2\omega_g Ey}{m\left(\omega_g^2-\omega^2\right)}+j\omega\in_0 Ey\left(1+\frac{Ne^2}{\in_0 m\left(\omega_g^2-\omega^2\right)}\right) \tag{8}$$

$$\left(\nabla\times\vec{H}\right)z=j\omega\in_0 Ez\left(1-\frac{Ne^2}{\in_0 m\omega^2}\right) \tag{9}$$

Si la frecuencia $\omega>>\omega_g$, entonces $\left(\omega_g^2-\omega^2\right)=-\omega^2$, y los factores que envuelven suma con la expresión $\frac{\omega_g}{\omega^2}$ pueden despreciarse, resultando en la misma expresión para las ecuaciones. En adición podría existir un valor crítico de la frecuencia angular ω para el cual

$$\frac{Ne^2}{m\in_0\omega^2}=1$$

Cuando esto ocurre, los componentes oscilatorios son cero indicando que no existe transmisión. Este sería el caso de reflexión de la onda oscilatoria en el medio. El índice de refracción del medio sería cero. Esta frecuencia crítica ω_0 y su correspondiente valor en hertzs υ_0 del plasma ("*cut-off frequency*") la llamamos ω_0.

$$\omega_0=e\sqrt{\frac{N}{m\in_0}}=2\pi\upsilon_0$$

$$\upsilon_0=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{N}{m\in_0}}$$

Sustituyendo

Carga $e=1.6\times10^{-19}$ Coulombs

Masa $m=9.11\times10^{-31}$ Kg

Permitividad espacio $\in_0=8.85\times10^{-12}$ farads

$$\upsilon_0=9\sqrt{N} \tag{10}$$

y donde N es la densidad electrónica del espacio y υ_0 la frecuencia crítica de reflexión o "*cut-off*".

N es del orden de 30,000 electrones por metro cúbico en el espacio. En la ionosfera terrestre éste número puede subir hasta 10^{12} electrones por metro cúbico, lo que corresponde a una frecuencia de "cut-off" de 9 MHz.

La frecuencia de las estaciones radiotransmisoras de onda larga están en la frecuencia de 550-1600 KHz. Por ser menores de 9 MGHz, éstas son reflejadas por la ionosfera. La frecuencia FM de 88-108 MGHz puede penetrar la ionosfera.

Substituyendo el valor de $\omega_0^2 = \dfrac{Ne^2}{m \in_0}$ en las ecuaciones (7) a la (9) y sacando como factor común $j\omega \in_0$ tenemos, en forma tensorial

$\nabla \times \vec{H} = \bar{\varepsilon}_{mn} \bullet \vec{E}'' =$

$$\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
\left\{1+\dfrac{\omega_0^2}{\omega_g^2-\omega^2}\right. & \left. -j\dfrac{\omega_0^2\omega_g}{\omega\left(\omega_g^2-\omega^2\right)}\right\} j\omega\in_0 & 0 & & Ex \\
\left\{j\dfrac{\omega_0^2\omega_g}{\omega\left(\omega_g^2-\omega^2\right)}\right. & \left. 1+\dfrac{\omega_0^2}{\omega_g^2-\omega^2}\right\} j\omega\in_0 & 0 & & Ey \\
\left\{0\right. & 0 & \left.\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right\} j\omega\in_0 & & Ez \\
\hline
\end{array}$$

La ecuación tensorial anterior tiene tensor de 3x3 elementos de forma

$$\bar{\varepsilon}_{mn} = \begin{matrix} \in_{11} & \in_{12} & \in_{13} \\ \in_{21} & \in_{22} & \in_{23} \\ \in_{31} & \in_{32} & \in_{33} \end{matrix}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \bar{\varepsilon}_{mn} \bullet \vec{E}''$$

donde $\bar{\varepsilon}_{mn}$ es un tensor de permitividad de (3x3) elementos y $\vec{E}''$ es el vector $iEx + jEy + kEz$.

Para la condición de $\omega >> \omega_g$ o para cuando el campo magnético es insignificante no hay *gyro*, el tensor de permitividad se reduce a:

$$\bar{\varepsilon}_{mn} = \begin{matrix} \left(1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\in_0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\in_0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\in_0 \end{matrix}$$

y

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\in_0 \vec{E}$$

la permitividad relativa $\in = 1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y el índice de refracción

$$\eta = \sqrt{\in} = \sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{1-\upsilon^2}{\upsilon_0^2}}$$

Cuando $\upsilon >> \upsilon_0$ el índice de refracción es real y la onda se propaga. Cuando ocurre lo contrario, el índice de refracción es imaginario y la onda se refleja. El índice de refracción es menor de uno (1.0), lo cual resulta contrario al índice de refracción cuando la luz pasa a un medio más denso.

Por otro lado, el índice de refracción $\eta = \dfrac{c}{V}$ o la velocidad de grupo

$$V = \frac{c}{\eta}$$

$$V = c\left[1-\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Expandiendo la expresión en corchete en una serie binomial y despreciando desde el tercer término en adelante de la serie, el resultado es

$$V = c\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)^2\right]$$

El tiempo t para trasmitir un pulso a través de una distancia L es

$$t = \frac{L}{V} = \frac{L}{c}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)^2\right]$$

donde la expresión de tipo $\dfrac{1}{(1-x)}$ se substituye por la expresión aproximada $(1+x)$, lo cual es correcto para valores fraccionales pequeños de x, como es el caso que nos ocupa.

La diferencia en tiempo de propagación de dos pulsos simultáneos a dos frecuencias diferentes υ_1 y υ_2 es

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{2c}\left[\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1}\right)^2\right]$$

$$t_2 - t_1 = \frac{L\upsilon_0^2}{2c}\left[\left(\frac{1}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\upsilon_1}\right)^2\right]$$

El pulso primero llega en tiempo t_1 a la más alta frecuencia υ_1 y más tarde llega el segundo pulso en t_2 y frecuencia más baja υ_2.

Anteriormente se indicó, formula (8):

$$\upsilon_0 = 9\sqrt{N} \text{ Hertzs.}$$

o sea

$$\upsilon_0^2 = 81N$$

donde N es la población de electrones encontrados con densidad específica en el paso L. El promedio de la densidad encontrada en el paso L es dado por:

$$\tilde{N} = \frac{1}{L}\int_0^L N dt$$

Evaluando el factor $\frac{L\upsilon_0^2}{2c} = 81\frac{L\tilde{N}}{2c}$

$$t_2 - t_1 = \frac{81L\tilde{N}}{2c}\left[\left(\frac{1}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\upsilon_1}\right)^2\right]$$

de donde

$$L\tilde{N} = \frac{2c(t_2 - t_1)}{81\left[\left(\frac{1}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\upsilon_1}\right)^2\right]} \text{ mm}^{-3}$$

$$= \frac{7.41\times10^6\ (t_2 - t_1)}{\left[\left(\frac{1}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\upsilon_1}\right)^2\right]} \text{ mm}^{-3}$$

El paso-densidad $L\tilde{N}$ normalmente se expresa en parsecs y se le llama la medida de dispersión (Dispersion Measure DM).

$$1\text{parsec} = (3.26)(8760)(3600)\left(3\times10^{10}\right)$$
$$= 3.08\times10^{18}\ \text{cm}/\text{pc}$$

Dividendo la expresión de $L\tilde{N}$ por la cantidad de arriba para expresarlo en pc y dividiendo también por 10^4 para cambiar metros a la 4ta potencia a cm a la cuarta potencia tenemos

$$L\tilde{N} = \frac{2.4\times10^{-16}\ (t_2 - t_1)}{\left[\left(\frac{1}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\upsilon_1}\right)^2\right]} \text{ pc cm}^{-3}$$

Re arreglando

$$L = \frac{10^{-16}\ (t_2 - t_1)}{(4150)\left(10^{-4}\right)\tilde{N}\left[\left(\frac{1}{\upsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\upsilon_1}\right)^2\right]} \text{ pc cm}^{-3}$$

Substituyendo el símbolo de la frecuencia υ por f y expresando la frecuencia en MGHz tenemos:

$$L = \frac{(t_2 - t_1)}{4150\tilde{N}\left[\left(\frac{1}{f_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{f_1}\right)^2\right]}$$

Substituyendo $\tilde{N} = 0.03\ \text{e}/\text{cm}^3$ y L por distancia D tenemos,

$$D = \frac{(t_2 - t_1)}{124.5\left[\left(\frac{1}{f_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{f_1}\right)^2\right]}$$

Esta es la fórmula expresada en la página 14 del Manual de Estudiante en el experimento titulado "*Radio Astronomy of Pulsars*", del Departamento de Física del Gettysburg College, Gettysburgs Pa, programa CLEA, ("*Contemporary Laboratory Experiences in Astronomy*")

III- EJEMPLO DE CÁLCULOS

Si la diferencia de llegada entre dos pulsos, uno de 300 MHz y otro de 400 MHz, es de 1.13 s y la densidad electrónica del espacio es $0.03 \ \text{electrones}/\text{cm}^3$, entonces, expresando frecuencia en cientos de MGHz,

La distancia $$L = \frac{\left(\frac{1}{0.03}\right)(2.4)(1.13)}{\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)} = 1859 \text{ pc}$$

Vice versa, si la distancia L se conoce por otros métodos, se puede calcular la densidad $\tilde{N}$. Una vez se determine la densidad $\tilde{N}$ se puede evaluar la obstrucción o reflexión a radiofrecuencias producidas por nebulosas de la fórmula

$$\nu_0 = 9\sqrt{N}$$

IV- REFERENCIAS

[1] F. W. White, Electromagnetic Waves, 1954 Catalog No. 4009/U (METHUEN) Britain.

[2] John D. Kraus, Radio Astronomy, 2nd Edition, Cygnus Quasar Books, Ohio, 1996. ISBN: 1-882484-00-2.

[3] Lyman Spitzer, The Physics of Fully Ionized Gases, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1962.